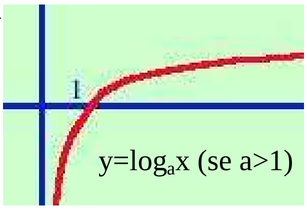
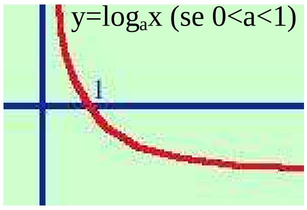
APPUNTI DI MATEMATICA

Funzione → dati gli insiemi *X* e *Y*, si chiama funzione da *X* in *Y* un sottoinsieme *f* del prodotto cartesiano XxY tale che per ogni $x \in X$, esiste uno ed un solo elemento $y \in Y$ tale che $(x,y) \in f$.
Funzione → relazione che associa ad ogni elemento del primo insieme, uno e un solo elemento del secondo insieme.
Dominio di una funzione → insieme su cui la funzione è definita (valori che può assumere x)
Codominio di una funzione → insieme dei valori che la funzione (y) può assumere
Funzione algebrica → funzione ottenuta attraverso operazioni algebriche (polinomi).
Funzione trascendente → funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.
Funzione periodica → funzione i cui valori si ripetono dopo un certo intervallo di tempo chiamato periodo.
Funzione pari → funzione simmetrica rispetto all'asse y, cioè $f(-x) = f(x)$.
Funzione dispari → funzione simmetrica rispetto all'origine, cioè $f(-x) = -f(x)$.
Prodotto cartesiano AxB (si legge "A cartesiano B") → insieme delle possibili coppie ottenute prendendo il primo elemento da A e il secondo elemento da B.
Una funzione si dice crescente se, presi due punti x_1 e x_2 tali che $x_1<x_2$, si ha $f(x_1)<f(x_2)$
Una funzione si dice decrescente se, presi due punti x_1 e x_2 tali che $x_1<x_2$, si ha $f(x_1)>f(x_2)$

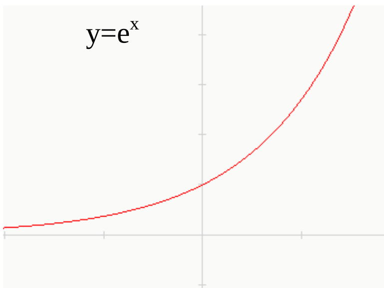
Proprietà dei logaritmi e funzione logaritmica





1) $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$
2) $\log_a b/c = \log_a b - \log_a c$
3) $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$y = \log_a x \rightarrow a^y = x$
$\log_a x > \log_a y \rightarrow x>y$ (se $a>1$) <u>oppure</u> $x<y$ (se $0<a<1$)
Il dominio delle funzioni logaritmiche si calcola ponendo l'argomento maggiore di 0 e la base maggiore di 0 <u>e</u> diversa da 1. Il codominio è tutto R.



Funzione esponenziale
Il dominio della funzione e^x è tutto R mentre, per quanto riguarda la funzione a^x, il dominio è $a>0$.
Il codominio è sempre R_0^+, per entrambe le funzioni.

Proprietà dei limiti
1) Se esiste il limite $\lim f(x) = l$ per x che tende a c, è unico
2) Se una funzione ammette un limite ed esso è diverso da 0, allora la funzione ha lo stesso segno del limite (permanenza del segno)
3) Se ho tre funzioni tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ed esistono i limiti $\lim f(x) = l$ e $\lim h(x) = l$ con x che tende ad un punto x_0, allora esiste il $\lim g(x) = l$, con x che tende a x_0.

Operazioni con i limiti
La **somma** di due limiti è uguale alla somma dei loro valori:
$\lim f(x) = l$ e $\lim g(x) = m \rightarrow \lim[f(x) + g(x)] = l + m$ (<u>non vale il viceversa</u>)
Il **prodotto** di due limiti è uguale al prodotto dei loro valori:
$\lim f(x) = l$ e $\lim g(x) = m \rightarrow \lim[f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$ (<u>non vale il viceversa</u>)
Il **quoziente** di due limiti è uguale al quoziente dei loro valori:
$\lim f(x) = l$ e $\lim g(x) = m \rightarrow \lim[f(x) / g(x)] = l / m$ (<u>non vale il viceversa</u>)

<u>RICORDARE</u>
$c/\infty = 0$
$c/0 = \infty$
$\infty/0 = \infty$
$0/\infty = 0$
∞/∞ = indeterminata
$0/0$ = indeterminata
$0 \cdot \infty$ = indeterminata
$\infty - \infty$ = indeterminata

Davide Valeriani

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Nel caso si abbia il limite di una funzione polinomiale con $x\to\infty$, si raccoglie la x di grado più alto.
Nel caso si abbia il limite di una radice si può razionalizzare per cercare di eliminare le radici.
In alcuni casi si può utilizzare il teorema di Ruffini.

Continuità di una funzione in un punto

Data una funzione f(x) di dominio D, preso il punto $x_0 \in D$, la funzione è continua in $x=x_0$ se:

1) $\exists\, f(x_0)$, cioè posso calcolare il valore della funzione in x_0
2) $\exists$ ed è finito il limite per x che tende a x_0 della f(x), cioè il limite è uguale ad un numero (l)
3) $l = f(x_0)$

Queste condizioni si possono riassumere in una: $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Se una funzione è continua, si può calcolare il valore di un suo limite semplicemente sostituendo alla x della funzione il valore del punto di accumulazione (x_0).
Una funzione è continua in un intervallo [a,b] quando è continua in ogni punto dell'intervallo.

Tipi di discontinuità

Se una delle tre precedenti condizioni non è verificata, la funzione presenta una discontinuità in quel punto. Si distinguono tre tipi di discontinuità:

- Se il valore del limite è finito ma diverso a seconda che si consideri i valori a destra o a sinistra del punto di accumulazione, la discontinuità viene detta di **I specie**
- Se almeno uno dei due valori del limite (per $x\to x_0^+$ e $x\to x_0^-$) vale infinito o non esiste, si ha una discontinuità di **II specie**.
- Se il valore del limite è diverso dal valore della funzione nel punto di accumulazione, la discontinuità è di **III specie**.

Proprietà delle funzioni continue

1) Teorema dell'esistenza degli zeri: se f(x) è continua in [a,b] e il segno di f(a) è diverso dal segno di f(b), allora $\exists\, c \in\ ]a,b[$ tale che f(c)=0.
2) Teorema di Weierstrass: se f(x) è continua in [a,b], allora esistono un valore minimo (x_1) e un valore massimo (x_2) tale che $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$.
3) Teorema di Bolzano: se f(x) è continua in [a,b], allora assume nell'intervallo ogni valore compreso tra il minimo e il massimo.

Derivata di una funzione in un punto → limite finito, se esiste, del rapporto incrementale della funzione nel punto. Preso un Δx infinitesimo, è il rapporto tra l'incremento della funzione Δf, cioè $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, e Δx.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Una funzione derivabile è sempre continua, ma non vale il viceversa!
La derivata è anche il coefficiente angolare della tangente alla curva.
Una funzione è derivabile in un intervallo se esiste in ogni punto dell'intervallo il valore della derivata. Se f(x) è derivabile in $x=x_0$, allora $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

Tangente ad una curva in un suo punto

Per calcolare l'equazione della tangente ad una curva in un suo punto $P(x_p,y_p)$, si determina il coefficiente angolare m calcolando la derivata prima della curva e sostituendo la x del punto alla derivata stessa. L'equazione della tangente avrà equazione $y-y_p=m(x-x_p)$.

Derivate fondamentali

$y = c \Rightarrow y' = 0$

$y = x \Rightarrow y' = 1$

$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{-1}$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n^{n-1}}}$

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

$y = \tan x \Rightarrow y' \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$y = \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{sen^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

$y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}$

$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = arc \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Proprietà delle derivate

La derivata di una somma di due funzioni è uguale alla somma delle singole derivate:

$y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$

La derivata di una differenza di due funzioni è uguale alla differenza delle singole derivate:

$y = f(x) - g(x) \Rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$

La derivata di una prodotto di due funzioni è uguale alla derivata del primo fattore per il secondo più la derivata del secondo per il primo: $y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

La derivata di un quoziente di due funzioni è uguale alla derivata del numeratore per il denominatore meno la derivata del denominatore per il numeratore, tutto fratto il quadrato del denominatore: $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

La derivata del reciproco di una funzione è uguale al rapporto tra l’opposto della derivata della funzione e il quadrato della funzione stessa: $y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

La derivata di una costante per una funzione è uguale alla costante per la derivata della funzione:

$y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)$

Punto angoloso → punto di una funzione in cui esistono sia la derivata destra sia quella sinistra, ma sono diverse. $f'^{-}(x_0) \neq f'^{+}(x_0)$
Cuspide → punto di una funzione continua ma non derivabile, in cui la derivata destra vale +∞ e quella sinistra vale -∞, o viceversa.
Teorema di Rolle → se una funzione è continua nell'intervallo [a,b], derivabile nell'intervallo]a,b[e se f(a)=f(b), allora esiste un punto c appartenente all'intervallo]a,b[tale che la derivata della funzione nel punto c sia uguale a 0.
f(x) continua in [a,b] e derivabile in]a,b[e se f(a)=f(b) → $\exists$ c $\in$]a,b[| f'(c)=0
Teorema di Lagrange → se una funzione è continua nell'intervallo [a,b] e derivabile nell'intervallo]a,b[, allora esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la derivata prima è la differenza dei valori della funzione negli estremi fratto la differenza degli estremi.
f(x) continua in [a,b] e derivabile in]a,b[→ $\exists$ c $\in$]a,b[| f'(c)= $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dimostrazione: g(x)=f(x)+kx, continua e derivabile in [a,b] perchè somma di funzioni continue e derivabili. Ipotizziamo che g(a)=g(b), perciò si avrà f(a)+ka=f(b)+kb. Ricavando k, si avrà
k= $\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ perciò la funzione g(x)=f(x) + $\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ x. Dato che g(a)=g(b), vale il teorema di Rolle, per cui $\exists$ c $\in$]a,b[| g'(c)=0. Calcolando la derivata, g'(x)=f'(x)+ $\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$
Pongo ora g'(c)=0 per trovare il punto in cui la derivata si annulla (Rolle).
f'(c)+ $\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ = 0, ovvero f'(c)= - $\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ che, cambiando il segno al denominatore, diventa

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$ C.V.D.

Massimo assoluto di una funzione → punto x_0 del dominio *D* di *f* tale che $f(x_0) \geq f(x)$, per ogni x appartenente al dominio.
Minimo assoluto di una funzione → punto x_0 del dominio *D* di *f* tale che $f(x_0) \leq f(x)$, per ogni x appartenente al dominio.
Massimo relativo di una funzione → punto x_0 del dominio *D* di *f* tale che $f(x_0) \geq f(x)$, con x appartenente ad un intorno di x_0.
Minimo relativo di una funzione → punto x_0 del dominio *D* di *f* tale che $f(x_0) \leq f(x)$, con x appartenente ad un intorno di x_0.
Asintoto → retta che si avvicina alla funzione senza mai toccarla, ovvero retta tangente all'infinito della funzione. Esistono tre tipi di asintoti:

- ***asintoto verticale*** → quando l'asintoto ha equazione x=k $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$
- ***asintoto orizzontale*** → quando l'asintoto ha equazione y=k $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$
- ***asintoto obliquo*** → quando l'asintoto ha equazione y=mx+q $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Se una funzione è crescente, la derivata prima è positiva; viceversa, se la funzione è decrescente, la derivata prima è negativa. Se la derivata prima è uguale a 0, il punto sarà di massimo o minimo.
Dimostrazione: se la funzione è crescente, il rapporto incrementale sarà maggiore di 0 e, perciò, anche il limite del rapporto incrementale, cioè la derivata prima. Uguale dimostrazione se la funzione è decrescente.
Teorema de l'Hopital → nel calcolo di un limite, se si ha un quoziente il cui numeratore e denominatore convergono tutti e due a zero oppure a infinito, si calcola il quoziente delle derivate del numeratore e del denominatore. Se esiste il limite di questo nuovo quoziente, allora esiste anche il limite del quoziente originale, e i due limiti sono uguali.
Nei punti di massimo e minimo, la tangente alla funzione nel punto è parallela all'asse x.
Se il limite della funzione per x che tende a ∞ vale un numero finito N, la retta y=N è un asintoto orizzontale.
Se il limite della funzione per x che tende ad un numero finito N vale infinito, la retta x=N è un asintoto verticale.
Asintoti obliqui → per trovare l'equazione degli eventuali asintoti obliqui (y=mx+q):

1) si calcola il valore del $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$
2) si distinguono due casi:
    a. se m è finito, m è il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo (si passa al punto 3)
    b. se m è infinito, non esistono asintoti obliqui (ci si ferma)
3) si calcola il valore del $\lim_{x\to\infty} f(x)-mx = q$
4) si distinguono due casi:
    a. se q è finito, l'asintoto obliquo esiste ed ha equazione y = mx + q
    b. se q è infinito, non esistono asintoti obliqui

Se il limite di una funzione per x che tende a c vale 0, la funzione è detta **infinitesima**; se, invece, tale limite vale ∞, la funzione si dice **infinita**.

Confronto di funzioni → per confrontare due funzioni (infinite o infinitesime), si fa il limite per $x\to c$ del loro rapporto. Se il valore del limite:
1) vale **∞**, allora la funzione al numeratore è di **ordine superiore** rispetto a quella che sta al denominatore;
2) vale un **numero finito** diverso da 0, allora la funzione al numeratore è dello **stesso ordine** di quella che sta al denominatore;
3) vale **0**, allora la funzione al numeratore è di **ordine inferiore** rispetto a quella che sta al denominatore.

Una curva ha la concavità verso l'alto quando rimane tutta al di sopra della tangente in quel punto.
Una curva ha la concavità verso il basso quando rimane tutta al di sotto della tangente in quel punto.
Flesso → punto della funzione nel quale cambia la concavità. Può essere a tangente orizzontale, obliquo o a tangente verticale, nel caso in cui la tangente nel punto sia una retta orizzontale, obliqua o verticale.
Se la derivata seconda è positiva, allora la funzione ha la concavità verso l'alto. Se la derivata seconda è negativa, allora la funzione ha la concavità verso il basso. Quando la derivata seconda si annulla, in quel punto si ha un punto di flesso.
Formula di Taylor → permette di costruire un polinomio che approssima l'andamento di una funzione, tale che coincide con la funzione in un dato punto e le sue derivate coincidono con quelle della funzione. Dato un polinomio P(x) e un numero x_0, è possibile individuare il polinomio secondo le potenze di $(x- x_0)$. La **formula di Taylor** è:

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)\cdot(x- x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}\cdot(x- x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}\cdot(x- x_0)^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x- x_0)^n$$

Chiamiamo resto (Rn) la differenza tra la funzione e il polinomio che la approssima. Il resto fornisce una valutazione dell'errore che si compie sostituendo il polinomio alla f(x).
Nel caso di a=0, la formula di Taylor viene chiamata **formula di Mac Laurin**.
La formula di Taylor consente di calcolare i punti di massimo o minimo relativi di una funzione.
Dalla formula, il polinomio approssimante la funzione si può scrivere in questo modo:

$$f(x) – f(x_0) = f'(x_0)(x- x_0)+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x- x_0)^n$$

Ipotizzando nulle le prime n-1 derivate, si arriva a scrivere l'equazione seguente:
$f(x) – f(x_0) = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x- x_0)^n$ trascurando il resto Rn. Perciò, il segno dell'espressione $f(x)-f(x_0)$ dipende dal segno di $(x- x_0)^n$ e di $f^n(x_0)$, perciò:
- se n è pari → $(x- x_0)^n$ è sempre positivo, allora
    - se $f^n(x_0)>0 \to f(x)-f(x_0)>0 \to f(x)>f(x_0) \to x_0$ è un punto di minimo relativo
    - se $f^n(x_0)<0 \to f(x)-f(x_0)<0 \to f(x)<f(x_0) \to x_0$ è un punto di massimo relativo

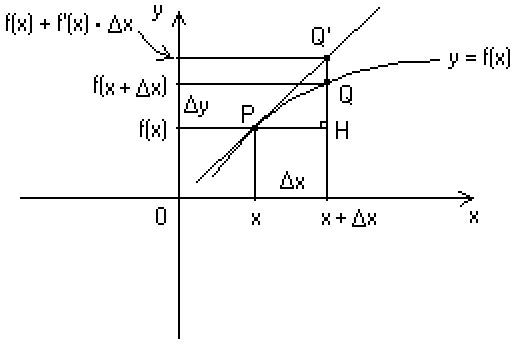
  (se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0 \to$ minimo, oppure, se $f''(x_0)<0 \to$ massimo)
- se n è dispari, si hanno i seguenti casi:

	$(x-x_0)^n<0$	**$(x-x_0)^n>0$**	**Risultato**
$f^n(x_0)>0$	$f(x)<f(x_0)$	$f(x)>f(x_0)$	f(x) è CRESCENTE
$f^n(x_0)<0$	$f(x)>f(x_0)$	$f(x)<f(x_0)$	f(x) è DECRESCENTE

Se, in uno studio di funzione, trovo un punto in cui la derivata prima si annulla, posso determinare la sua natura (massimo o minimo) calcolando il valore della derivata seconda in quel punto.

- Se $f''(x_0) > 0$, la concavità è verso il basso e si avrà un **minimo**
- Se $f''(x_0) < 0$, la concavità è verso l'alto e si avrà un **massimo**

Differenziale → prodotto della derivata per l'incremento della variabile indipendente: $df=f'(x)\cdot\Delta x$.
La definizione di differenziale si ricava dalla definizione di derivata.
Il differenziale esprime l'incremento della funzione non sul grafico, ma sulla retta tangente.



Dimostrazione:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x) \quad \lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x)=0$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = \Delta x\cdot f'(x_0) + \underbrace{\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)}_{0\cdot 0}$$ trascurabile

$\Delta f(x)=\Delta x\cdot f'(x_0)$ ovvero il differenziale della funzione

Se $f(x)=x$ → $df(x)=dx=1\cdot\Delta x$ e $dx=\Delta x$ → $df(x)=dx\cdot f'(x)$

INTEGRALI

Data una funzione continua e derivabile in un intervallo [a,b], si suddivide l'intervallo in n intervalli infinitesimi, dati dalla formula $h=(b-a)/n$. Dopodiché, si prendono i minimi di ogni pezzettino e si traccia la retta parallela all'asse x, in modo da costruire tanti rettangoli, la cui area vale $h\cdot m_i$. La somma delle aree dei rettangoli così costruiti (s_n) approssima per difetto l'area della parte di piano sottesa alla funzione. Se, anziché i minimi, si prendessero i massimi di ogni pezzettino, la somma dei rettangoli (S_n) approssimerebbe per eccesso l'area della parte di piano sottesa alla funzione.
Dato che s_n e S_n sono classi contigue, tra di esse vi è un elemento separatore, chiamato **integrale**.
Integrale indefinito → insieme delle infinite primitive della funzione che differiscono tra loro per il valore di una costante c.
Integrale definito → rappresenta l'area della parte di piano compresa tra la funzione, l'asse x e gli estremi a e b. $S=\int_a^b f(x)dx$ Un integrale definito si calcola trovando la primitiva F(x) del corrispondente integrale indefinito e poi facendo la differenza tra F(b) e F(a) (dimostrato di seguito)

Teorema della media

Se f(x) è continua in [a,b] e derivabile in]a,b[, allora $\exists\, c \in\ ]a,b[\ |\ \int_a^b f(x)\cdot dx = (b-a)\cdot f(c)$.
Dimostrazione: dato che ogni minimo relativo è compreso tra il minimo assoluto e il massimo assoluto, si può scrivere che $m\cdot h<m_i\cdot h<M\cdot h$ e anche $n\cdot m\cdot h<s_n<n\cdot M\cdot h$. Dato che $h=(b-a)/n$, si può scrivere $(b-a)\cdot m<s_n<(b-a)\cdot M$. Calcolando i limiti per $n\to\infty$, diventa $(b-a)\cdot m<\int_a^b f(x)\cdot dx<(b-a)\cdot M$.
Siccome f(x) è continua, assumerà tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo, e quindi anche $\frac{\int_a^b f(x)\cdot dx}{b-a}$. Perciò, esisterò un c tale che $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\cdot dx}{b-a}$ e cioè $\int_a^b f(x)\cdot dx = (b-a)\cdot f(c)$ C.V.D.

Teorema di Torricelli

Se f(x) è continua nell'intervallo [a,b], allora la funzione integrale $F(x)= \int_a^x f(t)\cdot dt$ è una funzione derivabile in [a,b] e si ha che $F'(x)=f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Questo teorema è il teorema fondamentale del calcolo integrale in quanto permette di collegare il calcolo differenziale a quello integrale.
Dimostrazione:

$$F'(x)= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\cdot dt - \int_a^x f(t)\cdot dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_a^x f(t)\cdot dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\cdot dt - \int_a^x f(t)\cdot dt}{\Delta x} =$$

$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\cdot dt}{\Delta x}$ = dato che $b-a=x+\Delta x-x=\Delta x$, applico il teorema della media $f(c)\cdot\Delta x = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\cdot dt$

$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c)$ = quando $\Delta x\to 0$, $c\to x$ perché $x<c<x+\Delta x$ = $\lim_{c\to x} f(c) = f(x)$ C.V.D.

Proprietà formali

$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$ $\quad$ $\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$ $\quad$ $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$ con $c \in\ ]a,b[$

Corollario: $\int_a^b f(t)\cdot dt = F(b) - F(a)$

Dimostrazione:

Poniamo $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$ e sostituiamo a x prima l'estremo b e poi a. Viene che $F(b) = \int_a^b f(t)\cdot dt$ e che $F(a) = \int_a^a f(t)\cdot dt = 0$ dalla seconda proprietà formale. Facendo la differenza tra le due diventa $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\cdot dt - \int_a^a f(t)\cdot dt$, ovvero $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\cdot dt$ C.V.D.

F(x) è una primitiva della funzione f(x). Una funzione, tuttavia, può avere infinite primitive, che differiscono tra loro per una costante. Un integrale indefinito ha, perciò, infinite soluzioni.

Proprietà degli integrali

$\int k\cdot f(x)\cdot dx = k\int f(x)\cdot dx$ $\quad$ $\int f(x)\cdot dx=F(x)+c$ e $\int g(x)\cdot dx=G(x)+c \rightarrow \int[f(x)\pm g(x)]\cdot dx = F(x)\pm G(x)+c$

Calcolo delle aree

In generale, l'area della parte di piano sottesa ad una curva si calcola facendo l'integrale definito dell'equazione della curva, calcolato negli estremi considerati. Tuttavia, a seconda che la curva stia sopra o sotto l'asse x, il segno dell'integrale cambia. Nel dettaglio, si distinguono i seguenti casi:

- $f(x)>0\ \forall x \in [a,b] \rightarrow S = \int_a^b f(x)\cdot dx$
- $f(x)<0\ \forall x \in [a,b] \rightarrow S = -\int_a^b f(x)\cdot dx$
- $f(x)>0\ \forall x \in [a,c[$ e $f(x)<0\ \forall x \in\ ]c,b] \rightarrow S = \int_a^c f(x)\cdot dx - \int_c^b f(x)\cdot dx$

Nel caso in cui la parte di piano di cui calcolare l'area sia compresa tra due curve f(x) e g(x), si può dimostrare che la formula di calcolo dell'area è sempre: $S = \int_a^b[f(x)-g(x)]\cdot dx$ posto che $f(x)>g(x)$. Nel caso in cui uno dei due estremi non appartenga al dominio (cioè la funzione non sia continua nell'intervallo [a,b]), si calcola il limite per x che tende a quell'estremo dell'integrale definito in cui l'estremo che $\notin$ al dominio (b) viene sostituito con b-ε. In questo caso, si parla di **integrale generalizzato**.

Se $b\notin D$: $\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\cdot dx$ $\quad$ Se $b=\pm\infty$: $\int_a^{\infty} f(x)\cdot dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot dx$

Integrazione di funzioni razionali

Si possono distinguere vari casi, i più importanti sono:

- *integrale del logaritmo naturale* → quando si ha un integrale del tipo $\int \frac{k}{(ax\pm b)}\cdot dx$, la soluzione è $\frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$ (attenzione, il denominatore deve essere di primo grado!)
- *integrale di una frazione con denominatore di grado n* → $\int \frac{k}{(x-a)^n}\cdot dx$, la soluzione si ottiene trasformando la frazione in potenza con esponente negativo (-n) e diventa $\frac{k\cdot(x+a)^{-n+1}}{-n+1}+c$ (Ricordiamo che $\int x^n = x^{n+1}/(n+1)$)
- *integrale di un'arctg* → nel caso in cui si abbia $\int \frac{k}{1+x^2}$, la primitiva vale arctg x + c(notiamo che, in questo caso, il denominatore è irriducibile)
- *integrale di un logaritmo con argomento di grado n* → nel caso si abbia il denominatore di grado n e il numeratore di grado n-1 e nel caso in cui il numeratore sia la derivata del denominatore, la primitiva risulta essere il logaritmo naturale del denominatore; esempio: $\int 2x/(x^2+5) = \ln(x^2+5) + c$
- *integrale di una frazione con denominatore irriducibile* → nel caso si abbia il denominatore di grado n e il numeratore di grado n-1, si imposta l'equazione A(derivata del denominatore) + B = numeratore, si risolve e si trovano i valori A e B, dopodiché la frazione si può

scomporre; esempio: $\int(3x+1)/(x^2+5x+7)$, si imposta A(2x+5) + B = 3x+1, si trova A=2/3 e B=-7/3 e si risolve l'integrale in cui, al posto di 3x+1, si avrà 2/3(3x+1)-7/3…

- *integrale con il denominatore riconducibile all'arctg* → nel caso il denominatore sia di secondo grado irriducibile, lo si può trasformare nella forma $x^2 + k$ (con x che può essere anche un'espressione) e risolverlo con il metodo dell'arctg (ricordarsi delle derivate delle funzioni composte!)
- *integrale con il denominatore riducibile* → nel caso si abbia il denominatore riducibile tramite la formula della somma-prodotto (ad es. x^2-5x+6), l'integrale si risolve scomponendo il denominatore (in questo caso, in (x-2)(x-3)) per poi impostare l'equazione

  $$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

  $$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

  procedendo poi al calcolo del mcm e all'impostazione del sistema per calcolare A e B (diventa A(x-3) + B(x-2), poi calcoli, poi si raccoglie la x e si pone il coefficiente della x uguale a 0 e il termine noto uguale a 1). Nel caso in cui si abbia, al denominatore, due polinomi uguali, ma di grado diverso (es. x-2 e $(x-2)^2$), si deve impostare l'equazione a fianco, con una lettera per ogni denominatore diverso!
- *integrale con il denominatore riducibile usando Ruffini* → nel caso in cui il denominatore sia un polinomio che si annulla per x=a, si può scomporre il polinomio nel prodotto di due polinomi tramite la regola di Ruffini…
- *integrale con numeratore di grado maggiore o uguale del denominatore* → in questo caso, si può utilizzare la divisione tra polinomi per ottenere un polinomio quoziente Q(x) da integrare a parte e un polinomio resto R(x), che andrà integrato assieme al polinomio divisore D(x); in pratica, l'integrale originale $\int P(x)$ diventerà $\int Q(x) + \int R(x)/D(x)$.

Integrazione per sostituzione → per risolvere gli integrali attraverso questo metodo si sostituisce ad un'espressione in x un'altra espressione in t e si trasforma il dx in dt, moltiplicando il tutto per la derivata della nuova espressione. Una volta trovate le soluzioni, si deve tornare a sostituire all'espressione in t, quella in x, per avere l'insieme delle primitive che si cercava.

Integrazione per parti → nel caso si abbia un prodotto di due funzioni da integrare in cui una non è la derivata dell'altra, si può procedere all'integrazione per parti, considerando una come f'(x) e una come g(x). La formula risolutiva è $\int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx$. Nel caso in cui ci si blocchi nel calcolo, provare a ripartire considerando come f'(x) la g(x) e come g(x) la f'(x)!

Dimostrazione:
$D[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$ → $f(x)\cdot g'(x) = D[f(x)\cdot g(x)] - g(x)\cdot f'(x)$ → $\int f(x)\cdot g'(x) = \int D[f(x)\cdot g(x)] - \int g(x)\cdot f'(x)$ ricordando che l'integrale di una derivata è uguale alla funzione stessa, si ha → $\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)$ C.V.D.

Volume dei solidi di rotazione

Nel caso in cui si facesse ruotare un'area intorno all'asse x (o all'asse y) e si volesse calcolare il volume del solido così ottenuto, chiamato appunto solido di rotazione, basterebbe calcolare l'integrale definito della funzione al quadrato e moltiplicare il risultato per pi-greco. In lettere, diventa $V=\pi\cdot\int_a^b f(x)^2\cdot dx$

Nel caso in cui l'area fatta ruotare sia la parte di piano compresa tra due curve, il volume del solido così ottenuto sarebbe $V=\pi\cdot\int_a^b f(x)^2\cdot dx - \pi\cdot\int_a^b g(x)^2\cdot dx$ con f(x)>g(x).

Metodi numerici

I metodi numerici vengono usati per trovare i risultati dove non si riuscirebbe a farlo con il metodo classico. Nel caso degli integrali, se l'espressione è troppo complessa, si può ricorrere a questi metodi per trovare il risultato. Esistono diversi metodi numerici:

- metodo dei rettangoli → nel calcolo dell'area, anziché prendere massimi e minimi della funzione, prendo il rettangolo di base h e altezza pari al valore di sinistra dell'intervallo: in questo modo, la formula diventa $\int_a^b f(x) = h\cdot\sum y_i$ con i che varia da 0 a n-1 (con n = numero degli intervalli); in alternativa, si può scegliere di prendere come altezza i valori di destra dell'intervallo: in questo caso, la formula diventa $\int_a^b f(x) = h \cdot \sum y_i$ con i che varia da 1 a n.

- metodo dei trapezi (di Bézout) → in questo metodo, si prendono i trapezi formati dalla base, dall'altezza fino al valore sinistro dell'intervallo, dall'altezza fino al valore destro e dal segmento che unisce gli estremi dell'intervallo, per formare tanti trapezi; la formula di risoluzione diventa $\int_a^b f(x) = h/2 \cdot (y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$.
- metodo delle parabole (di Cavalieri-Simpson) → in questo metodo, l'intervallo [a,b] deve essere diviso in un numero pari di intervallini; ogni tre punti consecutivi (estremi degli intervalli) si fa passare una parabola e se ne prende un pezzo; la formula risolutiva diventa $\int_a^b f(x) = h/3 \cdot [y_0+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})+y_n]$

Funzioni in due variabili

Sono funzioni che si rappresentano in un grafico a tre dimensioni e che dipendono da due incognite. $z = f(x,y)$ è una funzione in due variabili!
Per calcolare il dominio di una funzione di due variabili, si procede nel solito modo, mettendo a sistema i domini delle varie funzioni. Tuttavia, in questo caso, i domini non saranno formati da intervalli, ma da funzioni (curve, rette, …). Il dominio sarà formato dalle parti di piano comuni.
Per quanto riguarda le derivate, nelle funzioni di due variabili si parla di derivate parziali. Questo perché, essendo in tre dimensioni, si avrà un piano tangente alla curva, non più una curva. Per calcolare la derivata prima rispetto a x (che si indica con Z'_x) si considera x come variabile e y come costante (perciò, la derivata di 2xy, ad esempio, è 2y), mentre per calcolare la derivata prima rispetto a y (Z'_y) si considera y come variabile e x come costante. Anche le derivate successive saranno parziali, perciò si avrà Z''_{xx}, cioè la derivata rispetto a x della derivata prima rispetto a x, Z''_{xy}, Z''_{yx}, Z''_{yy}. Per quanto riguarda le funzioni derivabili e che hanno la derivata seconda continua, Z''_{xy} e Z''_{yx} sono uguali! Ricordiamo che le derivate seconde ci danno informazioni sulla concavità della curva.
Per cercare i massimi e i minimi della funzione, condizione necessaria è che le due derivate prime parziali siano uguali a 0, ma non sufficiente perché potrebbe esserci un punto di flesso. La condizione sufficiente è che l'hessiano ($H = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy} \cdot f''_{yx}$) sia maggiore di 0. Inoltre, se f''_{xx} è maggiore di 0, si ha un minimo, se, invece, è minore di 0, si ha un massimo.
Se l'hessiano è negativo, si ha un punto di sella. Se H=0, non si ha nessuna informazione.
Per calcolare il volume del solido costruito sul piano, lo si divide in tanti parallelepipedi. Il volume del solido è uguale all'integrale doppio della funzione in due variabili. $V = \iint f(xy) \cdot dx \cdot dy$
Integrale doppio → fornisce la misura del volume del solido compreso tra la funzione e il piano contenente il suo dominio
Per risolvere un integrale doppio, si utilizzano le formule dello sdoppiamento, che riportano il calcolo dell'integrale doppio al calcolo di due integrali semplici. Le formule di sdoppiamento variano a seconda che il dominio D sia normale rispetto a x o rispetto a y.
Dominio normale rispetto a x → delimitato dalle rette x=a e x=b e dalle curve y=h(x) e y=g(x)
Dominio normale rispetto a y → delimitato dalle rette y=c e y=d e dalle curve x=r(y) e x=s(y)
Con a,b,c,d costanti e g(x), h(x), r(y), s(y) funzioni continue.
Formula di sdoppiamento con D normale rispetto a x → $\iint f(xy) \cdot dx \cdot dy = \int_a^b [\int_{h(x)}^{g(x)} f(xy) \cdot dy] \cdot dx$
Formula di sdoppiamento con D normale rispetto a y → $\iint f(xy) \cdot dx \cdot dy = \int_c^d [\int_{r(y)}^{s(y)} f(xy) \cdot dx] \cdot dy$
Nel caso di un dominio normale sia rispetto a x sia rispetto a y, si può scegliere arbitrariamente quale formula di sdoppiamento applicare.
Nel caso in cui, dopo lo sdoppiamento, gli integrali appaiano a variabili separate, cioè sia possibile dividere la x dalla y, si può portare fuori dall'integrale più interno l'espressione che contiene solo la variabile per cui non sto derivando. Perciò, se la funzione è a variabili separate, diventa:

$$\iint \mathbf{f(xy) \cdot dx \cdot dy = \int h(x) \cdot dx \cdot \int k(y) \cdot dy}$$

Calcolo degli zeri di una funzione
Può capitare di dover risolvere un'equazione composta da funzioni di natura diversa (ad esempio, una funzione trigonometrica e un polinomio, 2x+senx). In questo caso, si possono usare dei metodi per approssimare l'andamento della funzione e, in particolare, per trovare gli zeri della funzione. In ognuno dei tre metodi, si deve scegliere un intervallo [a,b] in cui si è sicuri che c'è uno zero della funzione. Per assicurarsi che l'intervallo scelto sia corretto, si deve verificare che il segno di f(a) sia diverso dal segno di f(b). I metodi da noi studiati sono tre:

- ***metodo dicotomico***: la prima approssimazione si calcola facendo la media tra i due estremi $\mathbf{x_1=(a+b)/2}$; per le approssimazioni successive, si sostituisce x_1 all'estremo in cui il valore della funzione in quel punto ha lo stesso segno della $f(x_1)$, dopodiché si riapplica la formula;
- ***metodo delle corde***: la prima approssimazione si calcola applicando la formula a lato; per quanto riguarda le approssimazioni successive, si calcola $f(x_1)$ e si sostituisce x_1 all'estremo in cui la funzione calcolata in quel punto ha lo stesso segno di $f(x_1)$; $\mathbf{x1= \dfrac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}}$
- ***metodo delle tangenti***: in questo metodo si deve determinare l'estremo da tenere fisso e quello da far variare per restringere l'intervallo; per farlo, si calcola il valore della funzione e della derivata seconda in ognuno dei due estremi; l'estremo in cui la funzione e la derivata seconda hanno lo stesso segno è quello da cui iniziare a cercare il valore approssimato; la formula è la seguente. $\mathbf{x_1=x_0 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$ Per quanto riguarda le approssimazioni successive, si calcola la funzione in x0 e, a seconda del segno, si sostituisce x_0 al primo o al secondo estremo, per poi reiterare.

Equazioni differenziali
Un'equazione del tipo: $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ nella quale figurano la variabile indipendente x, la funzione incognita y ed alcune delle sue prime n derivate viene chiamata equazione differenziale di ordine n (n è l'ordine più elevato della derivata che compare nell'equazione).
Un'equazione differenziale può essere di diversi tipi (lineare, a variabili separabili, ecc.), ognuno con un metodo diverso di risoluzione.
Teorema di Cauchy →se la funzione f(x,y) e la sua derivata parziale sono continue nei punti interni ad un certo dominio D del piano xy e se $P_0(x_0;y_0)$ è il punto interno a D, allora l'equazione differenziale ammette una ed una sola soluzione: $y=\varphi(x)$ definita in un certo intorno di x_0, per la quale risulti $\varphi(x)=y_0$. In pratica, per il punto $P_0(x_0;y_0)$ passa una ed una sola curva integrale. Nel caso di equazioni differenziali del secondo ordine, il punto P_0 sarà definito da tre punti $P_0(x_0;y_0;y_0')$ e la funzione f(x,y,y') dovrà essere continua assieme alle sue derivate parziali prime e seconde (y''_{xx}, …).
Le equazioni differenziali del **primo ordine** sono in forma normale quando si presentano nella scrittura y'=f(x,y). Possono essere di due tipi:

- ***a variabili separabili***: in questo caso, l'equazione si presenta nella forma $y'=h(x)\cdot g(x)$; per risolverla, si trasforma y' nel rapporto dy/dx (per la definizione di derivata), dopodiché si isola la funzione y da una parte e la funzione x dall'altra, con i relativi differenziali; non resta ora che fare l'integrale da tutte e due le parti e diventa: $\int dy/g(y)=\int h(x)dx + c$.
- ***lineari***: l'equazione è di primo grado rispetto a y e rispetto a y' e si presenta nella forma $y'+f(x)y=g(x)$. La formula per trovare l'integrale generale è $y=e^{-\int f(x)dx}\cdot[\int e^{\int f(x)dx}\cdot g(x)dx+c]$.
  Dimostrazione: consideriamo g(x)=0, perciò y'+f(x)y=0 che è a variabili separabili; dy/dx+f(x)y=0 che, risolvendola, diventa $\int dy/y=-\int f(x)dx + c_1$, ovvero $\ln y=-\int f(x)dx + \ln c$ ($\ln c=c_1$), quindi $y=c\cdot e^{-\int f(x)dx}$.
  Poniamo ora $y=u\cdot v$, di cui calcoliamo la derivata y'=u'v+uv'; sostituiamo questa alla prima equazione, e si ha $u'v+uv'+f(x)\cdot uv=g(x)$ che, raccogliendo, diventa u'v+u(v'+f(x)v)=g(x); poniamo la parentesi uguale a 0, e rimane u'v=g(x) che è a variabili separabili e diventa $u'=g(x)\cdot 1/v=g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$, infine, calcoliamo l'integrale e diventa $u=\int e^{\int f(x)dx}\cdot g(x)dx+c$. C.V.D.

Le equazioni differenziali del **secondo ordine** sono in forma normale quando si presentano nella scrittura y''=f(x,y,y'). Le equazioni da noi trattate sono di tipo lineare e si suddividono in:

- ***lineari omogenee a coefficienti costanti***: si presentano nella forma $ay''+by'+cy=0$; l'integrale generale ha forma $y=c_1y_1+c_2y_2$, dove y_1 e y_2 sono le soluzioni dell'equazione; per trovare y_1 e y_2, si può dimostrare che esse sono anche le soluzioni di un'equazione chiamata equazione caratteristica, che ha la forma $a\lambda^2+b\lambda+c=0$. Una volta risolta l'equazione caratteristica, si hanno tre casi:
  - $\Delta>0 \rightarrow$ 2 soluzioni reali diverse α, $\beta \rightarrow y_1=e^{\alpha x}$; $y_2=e^{\beta x}$
  - $\Delta=0 \rightarrow$ 2 soluzioni reali coincidenti $\alpha\equiv\beta \rightarrow y_1=e^{\alpha x}$; $y_2=xe^{\alpha x}$
  - $\Delta<0 \rightarrow$ 2 soluzioni complesse coniugate $\alpha\pm i\beta \rightarrow y_1=e^{\alpha x}\text{sen}\beta x$; $y_2= e^{\alpha x}\cos\beta x$
- ***lineari non omogenee a coefficienti costanti***: si presentano nella forma $ay''+by'+cy=f(x)$; la forma dell'integrale generale è ∫generale=∫generale dell'omogenea associata+∫particolare; a seconda della tipologia di f(x), cambia il metodo risolutivo:
  - *f(x) polinomio di grado n*: per prima cosa, calcolo le soluzioni dell'equazione omogenea associata, che si ottiene ponendo $f(x)=0$. Dopodichè, imposto il calcolo per il polinomio $\varphi(x)$, che deve essere di grado n (o di grado n+1 se nell'equazione non compare la y, ma la y'). Ad esempio, un polinomio di grado 1 avrà equazione $\varphi(x)=ax+b$! Dopodichè, si calcolano derivata prima e seconda del polinomio e le si sostituiscono alle y, y' e y'' della funzione originale; poi si mette a sistema a uguale al coefficiente corrispondente nella f(x) e b uguale al termine noto della f(x). Una volta ricavati a e b, costruisco l'integrale particolare sostituendoli al polinomio $\varphi(x)$ e lo sommo all'integrale generale dell'equazione omogenea associata, trovando così l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea!
  - *f(x) esponenziale*: in questo caso, f(x) è del tipo $Ae^{\alpha x}$. Una volta trovate le soluzioni dell'equazione caratteristica, si distinguono tre casi:
    - α non è soluzione dell'equazione caratteristica $\rightarrow \varphi(x)=ke^{\alpha x}$
    - α è una soluzione dell'equazione caratteristica $\rightarrow \varphi(x)=kxe^{\alpha x}$
    - α è soluzione doppia dell'equazione caratteristica $\rightarrow \varphi(x)=kx^2e^{\alpha x}$

    Per determinare k, si calcolano le prime due derivate di $\varphi(x)$ e si sostituiscono all'equazione originale, risolvendola e trovando il valore di k.
  - *f(x) trigonometrica*: in questo caso, f(x) è del tipo $p\,\text{sen}\omega x+q\cos\omega x$. Una volta trovate le soluzioni dell'equazione caratteristica, si distinguono due casi:
    - $i\omega$ non è soluzione dell'equazione caratteristica $\rightarrow \varphi(x)=A\,\text{sen}\omega x+B\cos\omega x$
    - $i\omega$ è soluzione dell'equazione caratteristica $\rightarrow \varphi(x)=Ax\,\text{sen}\omega x+Bx\cos\omega x$

    In seguito, si calcolano derivata prima e seconda di $\varphi(x)$, si sostituiscono all'equazione originale e si trovano A e B nel solito modo (sistema). Infine, si scrive l'integrale generale dell'equazione differenziale nella forma $y=c_1y_1+c_2y_2+\varphi(x)$.